

MÉLANGE À QUATRE ONDES MULTIPLE DANS LES FIBRES OPTIQUES

Maxime Baillot, Thierry Chartier, Michel Joindot

CNRS, UMR Foton, Université de Rennes 1, Enssat, F-22305 Lannion, France

maxime.baillot@enssat.fr

RÉSUMÉ

Nous proposons un modèle général pour décrire le mélange à quatre ondes dans les fibres optiques impliquant un nombre quelconque N d'ondes également espacées en fréquence.

MOTS-CLEFS : *Mélange à quatre ondes; Fibres optiques; Modélisation*

1. INTRODUCTION

Le mélange à quatre ondes est un effet non-linéaire bien connu qui se manifeste notamment dans les fibres optiques. Il résulte d'un couplage entre plusieurs ondes en présence de l'effet Kerr. Quand le mélange à quatre ondes implique seulement quatre ondes (deux ondes pompes de fréquences différentes et deux ondes Stokes décalées en fréquence par rapport aux deux ondes pompes par exemple), le phénomène est bien décrit par un système de quatre équations couplées [1]. Si le nombre d'ondes mises en jeu est supérieur à quatre (du fait par exemple d'un processus de mélange à quatre ondes en cascade), le système d'équations est alors plus compliqué à obtenir du fait de la croissance rapide du nombre de couplages possibles entre les ondes. Certains auteurs ont proposé des modèles à plus de quatre ondes (Liu propose un modèle comportant jusqu'à treize ondes par exemple [2]). Cependant, à notre connaissance, aucune formule générale n'a été proposée pour obtenir un système d'équations pour un processus de mélange à quatre ondes comprenant un nombre quelconque N d'ondes. Dans ce papier, nous proposons une relation générale qui nous permet d'obtenir les N équations couplées d'un mélange à quatre ondes comportant N ondes. Nous obtenons également une formule générale pour le désaccord de phase de chaque terme de couplage jusqu'à l'ordre quatre de dispersion.

2. THÉORIE

On considère une fibre optique monomode isotrope de longueur L , d'atténuation α et de coefficient non-linéaire γ . On développe la constante de propagation $\beta(\omega)$ du mode fondamental en série de Taylor autour de la fréquence centrale ω_0 :

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \beta_k (\omega - \omega_0)^k \quad (1)$$

où β_0 est la valeur de la constante de propagation en ω_0 et β_k la valeur de la dispersion d'ordre k . L'équation décrivant l'évolution de l'amplitude complexe lentement variable $A(z, t)$ du champ électrique est l'équation non-linéaire de Shrödinger [3] :

$$\frac{\partial A}{\partial z} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{i^{k+1} \beta_k}{k!} \frac{\partial^k A}{\partial t^k} + \frac{\alpha}{2} A = i\gamma |A|^2 A \quad (2)$$

où t est le temps et z la coordonnée longitudinale de la fibre.

Cette équation peut être utilisée pour décrire les effets du mélange à quatre ondes. En effet, si $A(0, t)$ est la somme de plusieurs ondes pompes en $z = 0$, l'équation (2) permet par exemple d'obtenir le spectre en sortie de fibre, montrant ainsi toutes les ondes Stokes générées par mélange à quatre ondes. Cependant, il est parfois plus intéressant de disposer d'équations séparées décrivant l'évolution individuelle de chaque onde (pompes et Stokes) durant leur propagation.

Par la suite, nous considérerons N ondes de fréquence ω_i avec $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{N-1} < \omega_N$ et où l'écart entre deux fréquences adjacentes est constant et vaut $\Delta\omega$. L'amplitude $A(z, t)$ du champ électrique total peut s'écrire ainsi :

$$A(z, t) = \sum_{n=1}^N A_n(z, t) e^{i(\beta(\omega_n) - \beta_0)z - (\omega_n - \omega_0)t} \quad (3)$$

En injectant la relation (3) dans l'équation (2) et en identifiant les termes de fréquence ω_n on peut obtenir l'équation d'évolution de l'onde A_n de fréquence ω_n . Le terme $|A|^2 A$ dans l'équation (2) couple trois ondes de fréquences ω_i , ω_j et ω_k imposant que ces fréquences obéissent à la condition $\omega_i + \omega_j - \omega_k = \omega_n$. Identifier tous les termes obéissant à cette condition, ainsi que leur phase associée, peut devenir fastidieux notamment quand le nombre N d'ondes est grand. En régime stationnaire ($\partial/\partial t = 0$), nous avons néanmoins obtenu une formule générale qui permet de décrire l'évolution de l'amplitude A_n de l'onde de fréquence ω_n en présence de tous les termes de couplage avec les autres ondes :

$$\frac{\partial A_n}{\partial z} = -\frac{\alpha}{2} A_n + i\gamma \left(|A_n|^2 + 2 \sum_{q=1, (q \neq n)}^N |A_q|^2 \right) A_n + i\gamma \sum_{p=1}^N \sum_{m=1 (\neq n, \neq p)}^N A_{n+p-m} A_m A_p^* e^{i\Delta\beta_{n+p-m, m, -p, -n} z} \quad (4)$$

Avec

$$\begin{aligned} \Delta\beta_{n+p-m, m, -p, -n} &= \Delta\omega^2 \beta_2(n-m)(p-m) + \frac{1}{2} \Delta\omega^3 \beta_3(n-m)(p-m)(n+p-N-1) \\ &+ \frac{1}{24} \Delta\omega^4 \beta_4(n-m)(p-m) [3(n+p-N-1)^2 + (n-m)^2 + (p-m)^2] \end{aligned} \quad (5)$$

où m, n, p et q sont des entiers qui doivent vérifier les conditions suivantes $1 \leq m, n, p, q \leq N$ et $1 \leq n+p-m \leq N$. Les équations (4) et (5), associées aux conditions précédentes, permettent de trouver les N équations d'évolution d'un processus de mélange à quatre ondes impliquant N ondes.

3. EXPÉRIENCE ET SIMULATION

Afin de vérifier la validité de notre modèle dans un cas qui implique plus de quatre ondes, nous avons effectué l'expérience suivante. Les ondes produites par deux lasers accordables, séparés en longueur d'onde de $\Delta\lambda$, sont injectées dans une fibre à dispersion décalée de 10,4 km avec un zéro de dispersion à 1548 nm, une pente de dispersion de 0,077 ps/km/nm², un coefficient non-linéaire $\gamma = 3,3$ W⁻¹km⁻¹ et des pertes $\alpha = 0,2$ dB/km. La puissance optique des deux ondes est de 13 dBm. A la sortie de la fibre, nous observons la génération de plusieurs ondes par effet de mélange à quatre ondes. La figure 1 montre des exemples de spectres optiques en sortie de fibre pour différentes valeurs de $\Delta\lambda$.

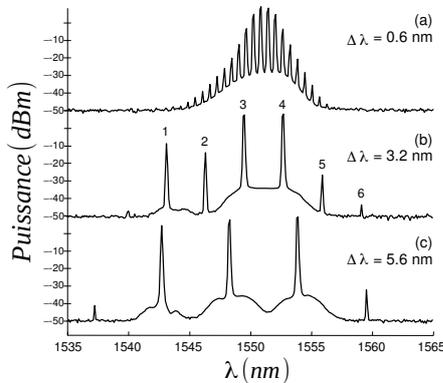


Figure (1) Spectres de sortie pour différentes valeurs de $\Delta\lambda$.

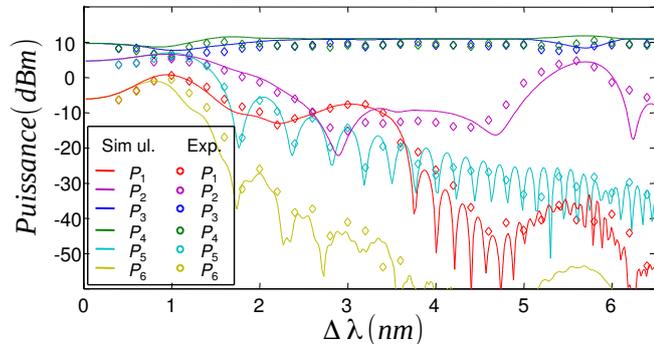


Figure (2) Evolution de la puissance de sortie des six ondes en fonction de $\Delta\lambda$.

Pour un décalage $\Delta\lambda$ de 0,6 nm, on peut observer sur la figure 1(a) un effet de mélange à quatre ondes en cascade qui conduit à la génération de plus de dix nouvelles ondes. Sur la figure 1(b), pour un

décalage $\Delta\lambda$ de 3,2 nm, le spectre montre cinq ondes principales. Sur la figure 1(c), pour un décalage $\Delta\lambda$ de 5,6 nm, seulement trois ondes principales sont visibles. Cette expérience montre clairement que dans les cas (a) et (b) le modèle classique de mélange à quatre ondes impliquant quatre ondes ne permet pas de décrire correctement le spectre en sortie de fibre.

Dans un souci de simplification, nous choisirons dans cet article de décrire l'expérience précédente avec un modèle impliquant six ondes. En prenant $N = 6$ dans les équations (4) et (5), nous pouvons établir de manière simple un système de six équations couplées décrivant l'évolution des six ondes ainsi que tous les désaccords de phase associés. A titre d'exemple, nous donnons ici l'équation d'évolution de l'onde A_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} = & - \frac{\alpha}{2} A_1 + i\gamma (|A_1|^2 + 2|A_2|^2 + 2|A_3|^2 + 2|A_4|^2 + 2|A_5|^2 + 2|A_6|^2) A_1 \\ & + i\gamma \left(A_2^2 A_3^* e^{-i\Delta\beta_4 z} + A_3^2 A_5^* e^{-i\Delta\beta_{12} z} + 2A_2 A_3 A_4^* e^{-i\Delta\beta_7 z} + 2A_2 A_4 A_5^* e^{-i\Delta\beta_9 z} \right) \\ & + i\gamma \left(2A_2 A_5 A_6^* e^{-i\Delta\beta_{10} z} + 2A_3 A_4 A_6^* e^{-i\Delta\beta_{13} z} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

avec

$$\Delta\beta_4 = \Delta^2\beta_2 - \frac{3}{2}\Delta^3\beta_3 + \frac{29}{24}\Delta^4\beta_4 \quad (7) \quad \Delta\beta_{10} = 4\Delta^2\beta_2 + \frac{68}{24}\Delta^4\beta_4 \quad (10)$$

$$\Delta\beta_7 = 2\Delta^2\beta_2 - 2\Delta^3\beta_3 + \frac{34}{24}\Delta^4\beta_4 \quad (8) \quad \Delta\beta_{12} = 4\Delta^2\beta_2 - 2\Delta^3\beta_3 + \frac{44}{24}\Delta^4\beta_4 \quad (11)$$

$$\Delta\beta_9 = 3\Delta^2\beta_2 - \frac{3}{2}\Delta^3\beta_3 + \frac{29}{24}\Delta^4\beta_4 \quad (9) \quad \Delta\beta_{13} = 6\Delta^2\beta_2 + \frac{78}{24}\Delta^4\beta_4 \quad (12)$$

Dans l'équation (6), les ondes pompes sont A_3 et A_4 , conformément à la numérotation de la figure 1(b). Cette équation contient tous les termes qui influencent l'évolution de A_1 le long de la fibre. En fonction de l'amplitude des ondes et des désaccords de phase, certains termes sont prédominants et peuvent conduire à l'amplification de A_1 pour des valeurs spécifiques de $\Delta\lambda$, comme observé expérimentalement.

Il est aisé de résoudre numériquement le système complet des six équations. La figure 2 compare les résultats expérimentaux et numériques décrivant l'évolution des puissances des six ondes en fonction de $\Delta\lambda$. Cette figure montre un excellent accord entre théorie et expérience.

Plus généralement, notre modèle permet d'étudier l'évolution de chaque onde dans un processus de mélange à quatre ondes impliquant un nombre arbitraire N d'ondes. Ce modèle peut par exemple être appliqué à l'étude de la génération de peignes de fréquences par effet de mélange à quatre ondes en cascade.

4. CONCLUSION

Nous avons établi, pour la première fois à notre connaissance, une formule générale permettant d'obtenir un système d'équations couplées décrivant le mélange à quatre ondes dans les fibres optiques impliquant un nombre quelconque N d'ondes, régulièrement espacées en fréquence. La comparaison entre les résultats expérimentaux et théoriques pour $N = 6$ donne des résultats très satisfaisants.

REMERCIEMENTS

Ce travail est financé par le Conseil Régional de Bretagne et le Conseil Général des Côtes d'Armor.

RÉFÉRENCES

- [1] M. E. Marhic, "Fiber Optical Parametric Amplifiers, Oscillators and Related Devices," *Cambridge University Press*, 2008.
- [2] X.-M. Liu, "Theory and experiments for multiple four-wave-mixing processes with multifrequency pumps in optical fibers", *Phys. Rev. A*. vol. 77, pp. 043818, 2008.
- [3] G. P. Agrawal, "Nonlinear Fiber Optics", 4th Ed., Academic Press (2006).